

- ① a) P ha per coordinate la soluzione del sistema $\begin{cases} x=t \\ y=1-2t \\ z=3 \\ x-z+1=0 \end{cases}$,
 così $P=(2, -3, 3)$.

Poiiché π' passa per P ed è parallelo all'asse y , la equazione del piano $a(x-2) + c(z-3) = 0$ cioè $ax + c(z-3) = 0$.

Essendo π' normale a π , dev'essere $(a, 0, c) \cdot (1, 0, -1) = 0$,
 così $a=c$. L'equazione di π' è quindi $x+z-5=0$.

- b) $\lambda: \begin{cases} x-z+1=0 \\ x+z-5=0 \end{cases}$ per cui eq. parametriche per λ sono $\begin{cases} x=2 \\ y=t \\ z=3 \end{cases}$

(tali eq. si trovano subito anche osservando che λ passa per P ed è parallelo all'asse y , essendo tali in π che π').

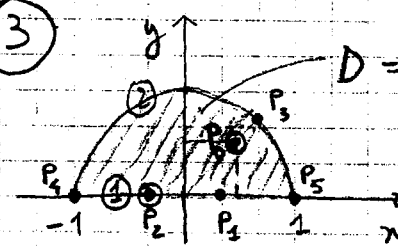
Si ha quindi $\cos \hat{\lambda} = \frac{|\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3|}{|\vec{v}_2| |\vec{v}_3|} = \frac{|(1, -2, 0) \cdot (0, 1, 0)|}{\sqrt{1^2+2^2} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

- ② Ricordando che $\nabla f(P_0)$ è sempre ortogonale alle corrispondenti curve di livello di f passante per P_0 , calcoliamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad \nabla f(2,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

La retta tangente avrà quindi direzione data da un vettore (a,b) con $(a,b) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = 0$, come ad esempio $(1, -2)$.

Imponendo il passaggio per $(2,1)$ si ottiene infine la retta $y = -2x + 5$.

- ③  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}$
 e $\partial D = ① \cup ②$ con $① = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, y=0\}$
 e $② = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1, y \geq 0\}$

Notiamo che f è di classe C^∞ , e determiniamo dapprima i punti critici interni a D . Calcoliamo dunque il gradiente di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2-y^2} + (x+y)e^{-x^2-y^2}(-2x) = e^{-x^2-y^2}(1-2x^2-2xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2-y^2} + (x+y)e^{-x^2-y^2}(-2y) = e^{-x^2-y^2}(1-2y^2-2xy)$$

$$\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-2x^2=2xy \\ 1-2y^2=2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=y^2 \\ 1-2x^2-2xy=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=y \\ 1-4x^2=0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x=-y \\ 1=0 \end{cases}; \text{ poich\u00e9 la seconda condizione \u00e8 } \\ \text{impossibile, risulta infine}$$

$$\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ 4x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ x=\pm 1/2 \end{cases} \text{ con } (1/2, 1/2) \text{ e } (-1/2, -1/2).$$

L'unico punto interno a D a gradiente nullo \u00e8 quindi $P_0 = (1/2, 1/2)$;
risulta $f(P_0) = 1/\sqrt{e}$.

- Ricerchiamo ora gli eventuali estremi di $f|_{\textcircled{1}}$. Il pezzo di frontiera $\textcircled{1} \bar{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0 \text{ e } x \in [-1,1]\}$, per cui il metodo di Lagrange impone

$$\begin{cases} 0 = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (x,y) \in \textcircled{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-2x^2-2xy=0 \\ y=0 \text{ e } x \in [-1,1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 1/\sqrt{2} \\ y=0 \end{cases}$$

e si ottengono i punti $P_1 = (1/\sqrt{2}, 0)$ e $P_2 = (-1/\sqrt{2}, 0)$; risulta
 $f(P_1) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{e}}$, $f(P_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{e}}$

- Ricerchiamo poi gli eventuali estremi di $f|_{\textcircled{2}}$. Il pezzo di frontiera $\textcircled{2} \bar{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0, y \geq 0\}$, per cui il metodo di Lagrange impone

$$\begin{cases} 0 = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \\ x^2+y^2-1=0 \text{ e } y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-2x^2-2xy) = x(1-2y^2-2xy) \\ x^2+y^2-1=0 \text{ e } y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=y \\ 2y^2=1 \text{ e } y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y=1/\sqrt{2} \end{cases} \text{ e si ottiene il punto}$$

$$\underline{P_3 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})}; \text{ risulta } \underline{f(P_3) = \sqrt{2}/e}.$$

∴ restano infine i punti di ∂D ove la funzione che determina ∂D non è differenziabile, che sono $P_4 = (-1, 0)$ e $P_5 = (1, 0)$;
 mentre $f(P_4) = -1/e$ e $f(P_5) = 1/e$.

∴ In definitiva abbiamo:

$$P_0 \rightarrow 1/\sqrt{e} \quad \Leftarrow \underline{\underline{\text{MAX}}}$$

$$P_1 \rightarrow 1/\sqrt{2e}$$

$$P_2 \rightarrow -1/\sqrt{2e} \quad \Leftarrow \underline{\underline{\text{MIN}}}$$

$$P_3 \rightarrow \sqrt{2}/e$$

$$P_4 \rightarrow -1/e$$

$$P_5 \rightarrow 1/e$$

$$(4) \text{ Area di } S = \int_0^\pi d\theta \int_0^{e^{\theta} \sin \theta} \rho \, d\rho = \int_0^\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{e^{\theta} \sin \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2\theta} \sin^2 \theta \, d\theta =$$

$$\uparrow \quad = \frac{1}{8} \left[e^{2\theta} \left(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{4} \right) \right]_0^\pi = \frac{1}{8} \left(e^{2\pi} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^{2\pi} - 1}{32}$$

$$\text{Infatti } \int e^{2\theta} \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} e^{2\theta} \sin^2 \theta - \int e^{2\theta} \sin \theta \cos \theta \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2\theta} \sin^2 \theta - \left(\frac{1}{2} e^{2\theta} \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \int e^{2\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \, d\theta \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{2\theta} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} e^{2\theta} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \int e^{2\theta} (1 - 2\sin^2 \theta) \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2\theta} \left(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{4} \right) - \int e^{2\theta} \sin^2 \theta \, d\theta \quad \text{da cui}$$

$$\int e^{2\theta} \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{4} e^{2\theta} \left(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{4} \right) + C$$

(5) Passando a coordinate sferiche, la massa è espressa dall'integrale triplo

$$\int_0^\pi d\varphi \int_2^4 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\ln \rho}{e} \cdot \rho^2 \sin \varphi \, d\theta = \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_2^4 \rho \ln \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= [-\cos \varphi]_0^\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} \left(\ln \rho - \frac{1}{2} \right) \right]_2^4 \cdot 2\pi = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[\rho^2 \left(\ln \rho - \frac{1}{2} \right) \right]_2^4 = \underline{\underline{4\pi(14\ln 2 - 3)}}$$

Infatti $\int e^p \ln p = \frac{p^2}{2} \ln p - \int \frac{p^2}{2} \cdot \frac{1}{p} dp = \frac{p^2}{2} \ln p - \frac{p^2}{4} + C = \frac{p^2}{2} \left(\ln p - \frac{1}{2} \right) + C$

⑥ 1^a serie : $a_n = \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, e termini positivi.

Dopo aver scritto $a_n = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{\frac{1}{n}}}$, osserviamo che se numeratore

che denominatore sono infinitesimi, il denominatore d'ordine $\frac{1}{2}$.
Calcoliamo l'ordine di infinitesimo del numeratore:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})^\alpha} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t^\alpha} \stackrel{(H)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+t}}{\alpha t^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha(1+t)t^{\alpha-1}} = 1 \text{ per } \alpha = 1. \text{ Ho provato che il}$$

numeratore ha ordine 1. In definitiva (a_n) è infinitesimo di ordine $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leq 1$, quindi la serie diverge per il criterio dell'ordine di infinitesimo.

2^a serie : $a_n = \frac{2^{n/3}}{\pi^{n-1}} = \pi \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\pi} \right)^n$, $n \in \mathbb{N}$:

si tratta dunque della serie geometrica convergente a

$$\pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt[3]{2}}{\pi}} = \frac{\pi^2}{\pi - \sqrt[3]{2}}, \text{ poich\'e } \left| \frac{\sqrt[3]{2}}{\pi} \right| < 1.$$